Concursul interjudețean
“Gheorghe Lazăr” – Sibiu – 22.03.2003

Ediția a III-a

Clasa a X-a

1. Se consideră $z_1, \dots, z_n \in \mathbf{C}$, $n \geq 3$ cu proprietățile $|z_1| - \dots = |z_n| = 1$, $z_1 + \dots + z_n = 0$ şi $z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0$. Să se arate că $\sum\limits_{1<j<k\leq n} |z - z_j||z - z_k| \geq \max\left\{1, |z|^2\right\} \cdot C_n^2$, $\forall\, z \in \mathbf{C}$.

Sorin Rădulescu şi **Ion Savu**

2. Se consideră poligonul convex $A_1 A_2 \dots A_n$ şi P şi Q două puncte variabile situate pe laturile sale. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului PQ.

Dan Tomescu, Bucureşti

3. Se consideră mulțimea $X = \left\{1, 2, \dots, n^2\right\}$, unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$ şi A *o* submulțime a sa cu n elemente. Să se arate că mulțimea $X - A$ conține cel puțin o progresie aritmetică cu n termeni.

Cătălina Ştefănescu. Bucureşti

4. Se consideră funcția $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ cu proprietatea $f(n) \geq \dfrac{f(n+1) + f(n-1)}{2}$, $\forall\, n \in \mathbf{Z}$. Să se arate că, dacă există $m \in \mathbf{R}$, astfel încât $f(n) \geq m$, $\forall\, x \in \mathbf{Z}$, atunci f este constantă.

Concours Général, France

Timp de lucru efectiv, 3 ore.